Задание 1 В-II 111

$f(x) = 3|в - x| + |20 - x| + |x - 15 - 3в|$, где

$в \in [0; 15]$; $x \in [в; 15]$

Пусть $x = 15$, а $в = 10$:

$f(x) = 3|10 - 15| + |20 - 15| + |15 - 15 - 30| = 50$.

$x = 15$, а $в = 1$

$f(x) = 3|1 - 15| + |20 - 15| + |15 - 15 - 3| = 50$, т.е.

функция $f(x)$ зависит от x, а не от $в$

(x зависит от $в$)

2.

Пусть $x = 14$, а $в = 5$

$f(x) = 3|5 - 14| + |20 - 14| + |14 - 15 - 15| = 49$

$x = 14$, а $в = 6$

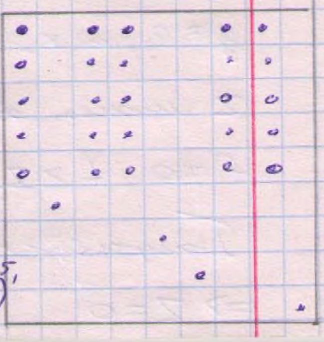
$f(x) = 3|6 - 14| + |20 - 14| + |14 - 15 - 18| = 49$ мы увидели, что

Аналогично рассужд. с другими значениями x,

При уменьшении x, y - уменьш., т.е $y_{наиб.} = y(x_{max}) =$

$= y(15) = 50$, а $y_{наим.} = y(0) = 35$

Задание 2



Чтобы получить как можно больше заполненных столбов и строк, нужно, чтобы в каждой строке или столбце было 5 фишек 7

По условию для заполн. нужно фишек $\geq$ 45, т.е 5

(наим. число фишек для заполнения)

Начнём расставлять 5 фишек на 1 строке в любых местах строки. Чтобы при этом получить заполненные столбцы, нужно под выставл. фишками первого столбца ставить последующие фишки на других строках. (чтобы в столбце было 5 фишек) Если расставить фишки подоб. образом, то получим 5 заполн. строк и 5 заполн. столбцов. Оставшиеся 4 фишки расставим на пустые строки по 1 в любых местах строк (для выполнения условия). В итоге получаем 10 заполненых столбцов и строк

Задание 3

$xyzf$ – число четырёхзначное; в записи есть 0, $x<y$, $y>z$, $f>z$; $x\,y\,z\,f$ – целые неотриц. числа, неповтор.

$x \neq 0$, т.к. число тогда было бы трехзначное

$y \neq 0$, т.к. $x<y$

z может быть 0

$f \neq 0$, $f>z$

Получается, что 0 может быть только $z \Rightarrow$

$\Rightarrow z=0$

Пусть $x=1$, тогда $y\in[2;9]$, $f\in[1;9)$.

~~1200~~

1201 – не соотв. условию
1202 ✓
1203 ⊕
1204 ⊕ ... 1209 ⊕

7 подходящих чисел.

При том, что меняя y мы получаем еще 7 чисел, то при $x=1$ в конце: $7\cdot 8=56$ чисел (8 – число значений, что y может принимать)

При увеличении x, область опред. y – уменьш. $y\in[x+1;9]$, а $x\in[1;8]$. Если ~~едем~~ при каждом допуст. значении x проделать операцию, аналогичную 1-ой, и сложить кол-во получ. чисел, то в конце получим:

$7\cdot 8+7\cdot 7+7\cdot 6+7\cdot 5+7\cdot 4+7\cdot 3+7\cdot 2+7=$

$=252$ числа, подходящих условию

2

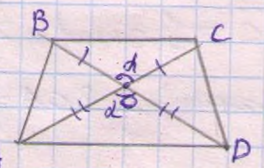
Задание 4

Пусть, мы выберем за выпуклый многоугольник равнобок. трапецию. Например

Дано

ABCD – равнобок. трапеция.

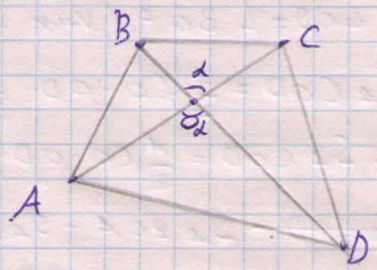
BC ∥ AD



0

Задание

Дано



$ABCD$ - четырёхугольник
$AC \cap BD = O$
$S_{\Delta} BOC = 4$

$S_{\Delta} AOD = 9$

Док-ть

$S_{ABCD} \neq 20$

Док-во

Рассмотрим ΔBOC.
Пусть $\angle BOC = \alpha$, тогда
$S_{\Delta} BOC = \frac{1}{2} BO \cdot OC \cdot \sin\alpha \Rightarrow \frac{1}{2} BO \cdot OC \cdot \sin\alpha = 4$

Рассмотрим ΔAOD

$\angle AOD = \angle BOC$ (как вертик.) $\Rightarrow \angle AOD = \alpha$

$S_{\Delta} AOD = \frac{1}{2} AO \cdot OD \cdot \sin\alpha \Rightarrow \frac{1}{2} AO \cdot OD \cdot \sin\alpha = 9$

Пусть $S_{ABCD} = 20$, тогда $S_{\Delta} BOA + S_{\Delta} COD = 20 - (S_{\Delta BOC} +$
$+ S_{\Delta} AOD) \Rightarrow S_{\Delta} BOA + S_{\Delta} COD = 20 - (4 + 9)$

$S_{\Delta} BOA + S_{\Delta} COD = 7$.

Рассмотрим ΔBOA
$\angle BOA = 180° - \alpha$ (т.к. $\angle BOA$ и $\angle BOC$ - смежные)
$S_{\Delta} BOA = \frac{1}{2} BO \cdot OA \cdot \sin(180° - \alpha)$, но $\sin(180° - \alpha) =$
$= \sin\alpha$ (по формуле приведения) $\Rightarrow S_{\Delta} BOA = \frac{1}{2} BO \cdot OA \cdot \sin\alpha$

Рассмотрим $\triangle COD$.

$\angle COD = \angle BOA$ (как вертик.) $\Rightarrow \angle COD = 180^\circ - \alpha$

$S_{\triangle COD} = \frac{1}{2} CO \cdot OD \cdot \sin(180^\circ - \alpha)$, а т.к. $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\triangle COD} = \frac{1}{2} CO \cdot OD \cdot \sin\alpha$.

$\cancel{S_{\triangle COD} +}\ S_{\triangle BOA} + S_{\triangle COD} = 7$.

$\frac{1}{2} BO \cdot OA \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2} CO \cdot OD \cdot \sin\alpha = 7$.

$(S_{\triangle BOC})$

Т.к. $\frac{1}{2} BO \cdot OC \cdot \sin\alpha = 4 \Rightarrow OC = \frac{8}{BO \cdot \sin\alpha}$, а $\frac{1}{2} AO \cdot OD \cdot \sin\alpha = 9$ $(S_{\triangle AOD})$, то $\Rightarrow OD = \frac{18}{AO \cdot \sin\alpha}$

$\frac{1}{2} BO \cdot OA \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2} CO \cdot OD \cdot \sin\alpha = 7$.

$\frac{1}{2} BO \cdot OA \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{BO \cdot \sin\alpha} \cdot \frac{18}{AO \cdot \sin\alpha} \cdot \sin\alpha = 7$

$\frac{1}{2} BO \cdot OA \cdot \sin\alpha + \frac{1 \cdot \cancel{8} \cdot 18 \cdot \cancel{\sin\alpha}}{\cancel{2} \cdot BO \cdot \sin\alpha \cdot AO \cdot \cancel{\sin\alpha}} = 7$

$\frac{1}{2} BO \cdot OA \cdot \sin\alpha + \frac{72}{BO \cdot AO \cdot \sin\alpha} = 7$.

$\frac{1}{2} BO \cdot OA \cdot \sin\alpha + \frac{\frac{1}{2} \cdot 72}{\frac{1}{2} BO \cdot AO \cdot \sin\alpha} = 7$

$\frac{1}{2} BO \cdot OA \cdot \sin\alpha + \frac{36}{\frac{1}{2} BO \cdot AO \cdot \sin\alpha} = 7$.

Пусть $\frac{1}{2} BO \cdot OA \cdot \sin\alpha = x$, тогда:

$x + \frac{36}{x} = 7$.

Т.к. $\frac{1}{2} BO \cdot OA \cdot \sin\alpha$ — это $S_{\triangle BOA}$, то $\frac{1}{2} BO \cdot OA \cdot \sin\alpha > 0 \Rightarrow x > 0$.

$$x + \frac{36}{x} = 7 \;\Big|\cdot x \; (x > 0)$$

$$x^2 + 36 = 7x$$

$$x^2 - 7x + 36 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$D = 49 - 144 = -95 < 0 \Rightarrow$ корней нет.

Т.к. x не имеет корней, то ~~выражение~~ произведение $\frac{1}{2} BO \cdot OA \cdot \sin\alpha$ не имеет ответа $\Rightarrow$ наше предположение было неверно $\Rightarrow S_{ABCD} \neq 20$

чтд.

$BD \cap AC = O$

$S_{\triangle BOC} = 4$, $S_{\triangle AOD} = 9$

$\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ — равнобедр. (по услов.)

Док-ть

$S_{ABCD} \neq 20$

Док-во

$\angle BOC = \angle AOD = \angle\alpha$ (как вертик.)

$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot BO^2$ $(BO = OC)$

$S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot AO^2$ $(AO = OD)$

~~$S_{\triangle BOC}$~~

Рассмотрим

$\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ — равнобедр.

1) $\angle BOC = \angle AOD$ (как вертик.)

$\angle CBO = \angle BDA$

2) $\cancel{\frac{AO}{OB} = \frac{OD}{OC}}$ ~~(дано)~~ (как внутр. накрест леж. при $AD \parallel BC$ и BD — секущ.)

$\Rightarrow$ $\triangle BOC \sim \triangle AOD$ по 2-ум ~~△-ики~~ углам. подобны ~~по равному углу и 2-ум~~ ~~лежащим между ним пропорц. сторонам~~

Из подобия $\Rightarrow \frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle AOD}} = K^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow k = \frac{2}{3}$

$\frac{AO}{BO} = \frac{3}{2}$; $1{,}5 BO = AO$.

$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot BO^2$

$S_{\triangle DOC} = \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot 2{,}25 BO^2$

Рассмотрим $\triangle BOA = \triangle COD$ (по 2-ум сторонам и $\angle$-у между ними) $BO = OC$, $AO = OD$, $\angle COD = \angle BOA$ (как верт.)

$S_\Delta BOA = S_\Delta COD = \frac{1}{2}\sin(\pi - \alpha)\cdot 1{,}5 BO^2 = \frac{1}{2}\sin\alpha\, 1{,}5 BO^2$

Пусть $S_{ABCD} = 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow 20 = \sin\alpha \cdot 1{,}5BO^2 + \frac{1}{2}\sin\alpha\cdot BO^2 + \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot 2{,}25\, BO^2 =$

$= 20 = \frac{1}{2}\sin\alpha\cdot BO^2 / \cancel{3+3+1+2{,}25} = 6{,}25 / \cdot 2$

$40 = \sin\alpha \cdot BO^2 \cdot 6{,}25$

$\frac{40}{6{,}25\cdot BO^2} = \sin\alpha$

$S_\Delta BOC = \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot BO^2$

$4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\overset{20}{\cancel{40}}}{6{,}25\cdot \cancel{BO^2}} \cdot \cancel{BO^2}$

$25 = 20$ ⊖

Наше утвержд. было неверно $\Rightarrow S_{ABCD} \neq 20$

Т.е. такой четырёхугольник ABCD – не может ~~ч.т.д.~~

иметь $S = 20$

ч.т.д.

Задание 5.

$p^3 - p^2q - 26p = 2q^2 - q - 1$, где q и p – натур. числа, p – простое число.

$2q^2 - q - 1 = 0 \quad p^3 - p^2q - 26p = 0$

$D = b^2 - 4ac$

$D = 1 + 8 = 9 > 0 \Rightarrow 2$ корня.

$q_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \qquad q_2 = \frac{1-3}{4} = -0{,}5 \notin$ услов.

$q_1 = \frac{1+3}{4} = 1 \in$ услов.

Т.е.: $p^3 - p^2 q - 26p = 0$

$q = 1$

$p(p^2 - p - 26) = 0$

$p = 0$ ∈ условию $\quad p^2 - p - 26 = 0$

$D = b^2 - 4ac$

$D = 1 + 104 = 105 > 0 \Rightarrow$ 2 корня

$p_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$p_1 = \frac{1 + \sqrt{105}}{2}$ — не ~~целое~~ прост. число ∉ услов. $\Big\} \Rightarrow$

$p_2 = \frac{1 - \sqrt{105}}{2}$ — не простое число ∉ услов.

$\Rightarrow$ Решением будет: $q = 1$ и $p = 0$

Ответ: $q = 1$ и $p = 0$

1 2
2 7
3 3
4 0
5 0

12